Lezione 10

Prestazioni statiche dei sistemi di controllo

Errore a transitorio esaurito

Le prestazioni statiche di un sistema di controllo fanno riferimento al suo comportamento a **transitorio esaurito**, ossia alla situazione in cui il sistema, dopo un transitorio dovuto alla variazione dei suoi ingressi, si è portato in una condizione di regime. In particolare saremo interessati, in questa condizione, all'**errore** tra il segnale di riferimento e la variabile controllata.

Prerequisito del sistema di controllo, necessario per poter parlare di prestazioni statiche, è evidentemente l'**asintotica stabilità** del sistema in anello chiuso.

Prenderemo in considerazione il seguente sistema di controllo, supposto asintoticamente stabile:

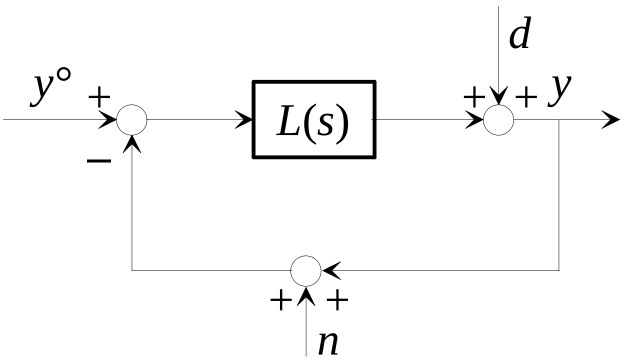


Fig. 1 : Sistema di controllo

Si osservi che con una rielaborazione formale dello schema a blocchi è possibile mettere direttamente in evidenza l'errore tra $y°$ e y:

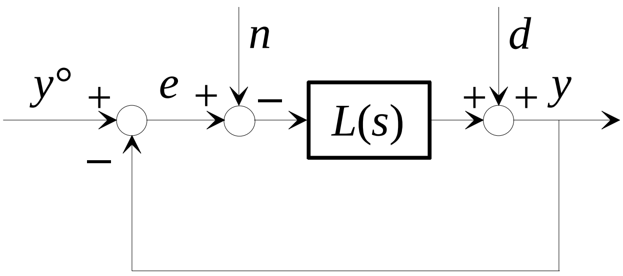


Fig. 2 : Sistema di controllo con in evidenza l'errore

Per lo studio delle prestazioni statiche è sufficiente riferirsi ad un insieme dei segnali di ingresso ristretto ai cosiddetti **segnali canonici**, come lo scalino, la rampa, la parabola ecc.

Infatti, ai fini della valutazione dell'errore a regime, sono del tutto irrilevanti le eventuali variazioni transitorie subite dal segnale di ingresso, del quale riveste interesse solo il comportamento asintotico ($t \to \infty$).

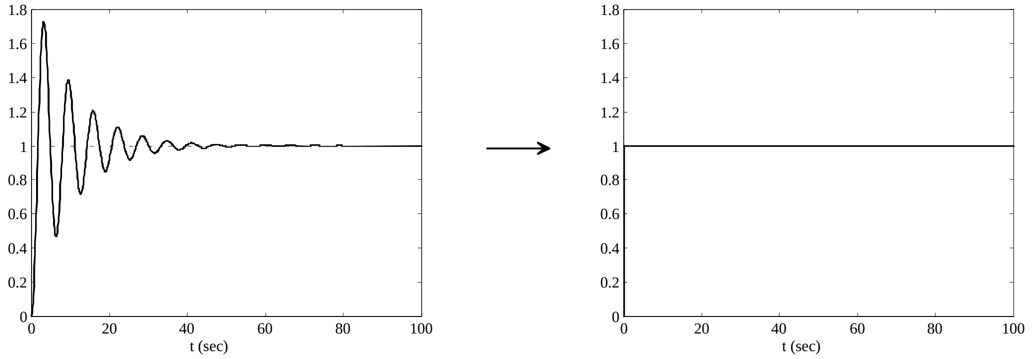


Fig. 3 : Equivalenza tra generici segnali e segnali canonici ai fini della valutazione delle prestazioni statiche

Essendo il sistema di controllo lineare, potremo valutare separatamente l'effetto sull'errore dovuto al segnale di riferimento ed ai disturbi (principio di sovrapposizione degli effetti).

Errore dovuto al segnale di riferimento

La funzione di trasferimento dal riferimento $y°$ all'errore e è la seguente:

$$\frac{E(s)}{Y°(s)} = \frac{1}{1+L(s)} \ .$$

Scriviamo la funzione di trasferimento d'anello nella seguente forma:

$$L(s) = \frac{\mu_L}{s^{g_L}} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_k (1+s\tau_k)} \ ,$$

e calcoliamo il valore limite dell'errore utilizzando il teorema del valore finale (applicabile essendo il sistema asintoticamente stabile):

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[sE(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+L(s)}Y°(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+\dfrac{\mu_L}{s^{g_L}}\dfrac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_k(1+s\tau_k)}}Y°(s)\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{1+\dfrac{\mu_L}{s^{g_L}}}Y°(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L}+\mu_L}Y°(s)\right]$$

Se $y°(t) = A\mathrm{sca}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{s^{g_L}}{s^{g_L}+\mu_L}\right] = \begin{cases} A, & g_L < 0 \\ \dfrac{A}{1+\mu_L}, & g_L = 0 \\ 0, & g_L \geq 1 \end{cases}$$

Se $y°(t) = A\mathrm{ram}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s^2}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{s^{g_L}}{s^{g_L+1}+s\mu_L}\right] = \begin{cases} \infty, & g_L \leq 0 \\ \dfrac{A}{\mu_L}, & g_L = 1 \\ 0, & g_L \geq 2 \end{cases}$$

Se $y°(t) = A\mathrm{par}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s^3}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{s^{g_L}}{s^{g_L+2}+s^2\mu_L}\right] = \begin{cases} \infty, & g_L \leq 1 \\ \dfrac{A}{\mu_L}, & g_L = 2 \\ 0, & g_L \geq 3 \end{cases}$$

Pertanto, per valori negativi del tipo g_L della funzione di trasferimento d'anello, l'errore è sempre infinito, o, tutt'al più, nel caso dell'ingresso a scalino, pari all'ampiezza stessa dello scalino in ingresso: si tratta di situazioni di nessun interesse pratico. Per valori del tipo maggiori o uguali a zero, si può compilare la seguente tabella:

g_L	Asca(t)	Aram(t)	Apar(t)
0	$\dfrac{A}{1+\mu_L}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{A}{\mu_L}$	∞
2	0	0	$\dfrac{A}{\mu_L}$

Si osservi che, quando l'errore assume un valore finito e non nullo, esso è tanto più piccolo quanto maggiore è il valore del guadagno d'anello μ_L.

Esempio

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{s}\frac{1+s}{1+10s} .$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, come si ricava immediatamente dall'analisi del polinomio caratteristico in anello chiuso.

Poiché il tipo di L vale g_L = 1, si ha errore a transitorio esaurito nullo con riferimento a scalino, infinito con riferimento a parabola, mentre con ingresso a rampa, l'errore a regime è pari all'ampiezza della rampa diviso 10.

Errore dovuto al disturbo in linea di andata

Dallo schema di Fig.2 si ottiene la funzione di trasferimento dal disturbo *d* all'errore *e*:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{1+L(s)} \; .$$

A parte il segno, si tratta della stessa funzione di trasferimento presente tra il riferimento e l'errore. Pertanto tutti i risultati della discussione precedente possono ancora essere utilizzati, pur di tenere conto del cambiamento di segno.

Si possono tuttavia presentare dei casi in cui il disturbo non entra nello schema a blocchi del sistema di controllo come raffigurato in Fig. 2, ossia direttamente in uscita alla funzione di trasferimento del processo. Per poter utilizzare ancora la tabella delle prestazioni statiche, occorre allora "riportare" il disturbo in uscita, considerando uno schema analogo a quello di Fig.2, in cui il disturbo in uscita è tale da dare gli stessi effetti a transitorio esaurito del disturbo effettivo.

Si considerino i seguenti due casi:

a) Il disturbo entra nel sistema di controllo passando attraverso un sistema di funzione di trasferimento $H(s)$:

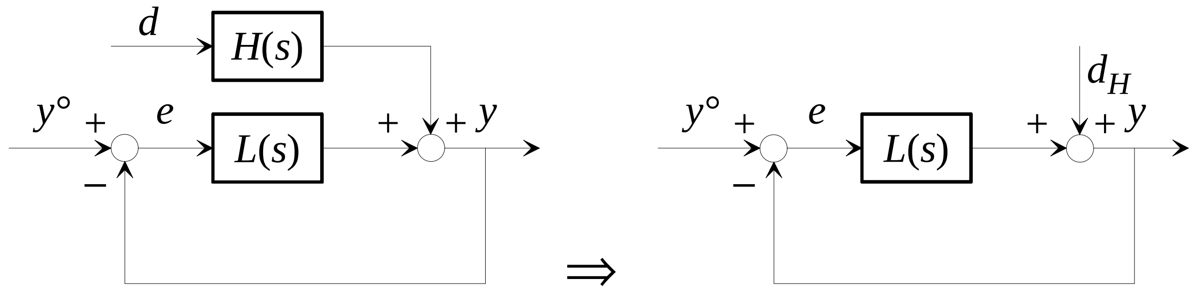


Fig. 4 : Sistema di controllo con disturbo filtrato

Detti μ_H e g_H guadagno e tipo di $H(s)$, il disturbo riportato in uscita, d_H, equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo *d*, avrà trasformata:

$$D_H(s) = \frac{\mu_H}{s^{g_H}} D(s) \, .$$

Si osservi infatti che gli eventuali poli o zeri di *H* non nell'origine non hanno alcun effetto sul comportamento a regime ($s \rightarrow 0$).

b) Il disturbo entra nel sistema di controllo a monte del processo, ossia del sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ (disturbo di *carico*):

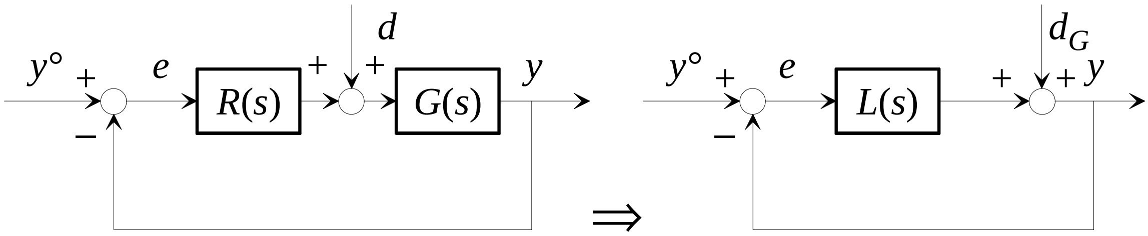


Fig. 5 : Sistema di controllo con disturbo di carico

Detti μ_G e g_G guadagno e tipo di $G(s)$, il disturbo riportato in uscita, d_G, equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo d, avrà trasformata:

$$D_G(s) = \frac{\mu_G}{s^{g_G}} D(s).$$

Esempio

Con riferimento alla Fig. 4, sia:

$$R(s) = 5, \quad G(s) = \frac{6}{s}\frac{1+3s}{1+4s}, \quad d(t) = 3\,\mathrm{sca}(t).$$

La funzione di trasferimento d'anello risulta:

$$L(s) = \frac{30}{s}\frac{1+3s}{1+4s}.$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\chi(s) = 30(1+3s) + s(1+4s) = 4s^2 + 91s + 30 \ ,$$

ed ha le due radici a parte reale negativa, il che comporta che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Il disturbo d_G riportato in uscita ha trasformata:

$$D_G(s) = \frac{6}{s} D(s) = \frac{6}{s}\frac{3}{s} = \frac{18}{s^2}.$$

Pertanto:

$$d_G(t) = 18\,\mathrm{ram}(t).$$

Poiché il tipo della funzione di trasferimento d'anello vale $g_L = 1$, ed il guadagno $\mu_L = 30$, dalla tabella si ottiene:

$$e_\infty = -\frac{18}{30} = -0.6.$$

Errore dovuto al disturbo in linea di retroazione

Dallo schema di Fig.2 si ottiene la funzione di trasferimento dal disturbo *n* all'errore *e*:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s)\ .$$

Calcoliamo il valore limite dell'errore utilizzando il teorema del valore finale:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[sE(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{L(s)}{1+L(s)}N(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{\dfrac{\mu_L}{s^{g_L}}}{1+\dfrac{\mu_L}{s^{g_L}}}N(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\mu_L s}{s^{g_L}+\mu_L}N(s)\right]$$

Se $n(t) = A\mathrm{sca}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\mu_L s}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{\mu_L}{s^{g_L}+\mu_L}\right] = \begin{cases} A\dfrac{\mu_L}{1+\mu_L}, & g_L = 0 \\ A, & g_L \ge 1 \end{cases}$$

Se $n(t) = A\mathrm{ram}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\mu_L s}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s^2}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{\mu_L}{s^{g_L+1}+\mu_L s}\right] = \infty, \quad \forall g_L \ge 0\ .$$

Se $n\ (t) = A\mathrm{par}(t)$, risulta:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\mu_L s}{s^{g_L}+\mu_L}\frac{A}{s^3}\right] = \lim_{s\to 0}\left[A\frac{\mu_L}{s^{g_L+2}+\mu_L s^2}\right] = \infty, \quad \forall g_L \ge 0\ .$$

Si può compilare la seguente tabella:

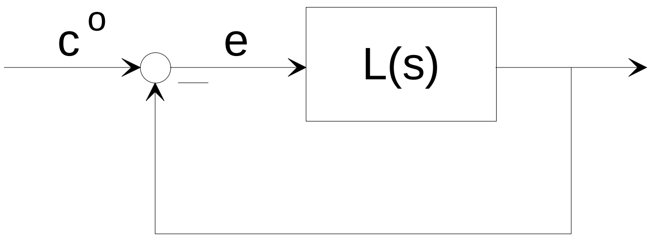
g_L	$A\mathrm{sca}(t)$	$A\mathrm{ram}(t)$	$A\mathrm{par}(t)$
0	$A\dfrac{\mu_L}{1+\mu_L}$	∞	∞
1	A	∞	∞
2	A	∞	∞

Quindi l'errore si mantiene finito solo per disturbo a scalino dove però è pari all'ampiezza del disturbo stesso per tipo maggiore o uguale a 1, e se ne scosta solo leggermente per tipo uguale a zero (si ricorda che μ_L deve essere un numero elevato per garantire errore piccolo sul riferimento e sul disturbo in linea di andata).

E' allora evidente che, in presenza di un trasduttore con errore statico, il sistema di controllo non può garantire a regime una precisione migliore di quella del trasduttore.

Esercizi

Esercizio 10.1



Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si valuti l'errore *e* a transitorio esaurito quando:

$$L(s) = \frac{10}{s}\frac{1}{(1+s)^2}$$

e $c^o(t)$ = sca(t).

Esercizio 10.2

Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si valuti l'errore *e* a transitorio esaurito quando:

$$L(s) = \frac{10}{s^2+s}$$

e:

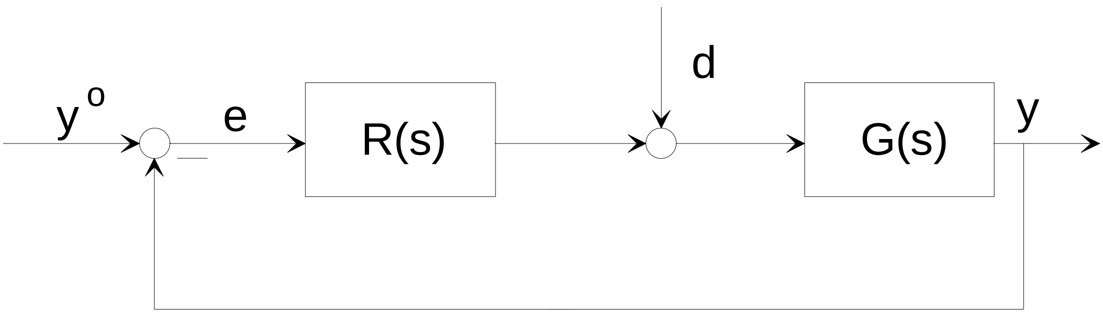
a) $c^o(t)$ = sca(t)

b) $c^o(t)$ = ram(t)

c) $c^o(t)$ = sca(t) + par(t)

Esercizio 10.3

Si valuti l'errore *e* a transitorio esaurito nel seguente schema di controllo:



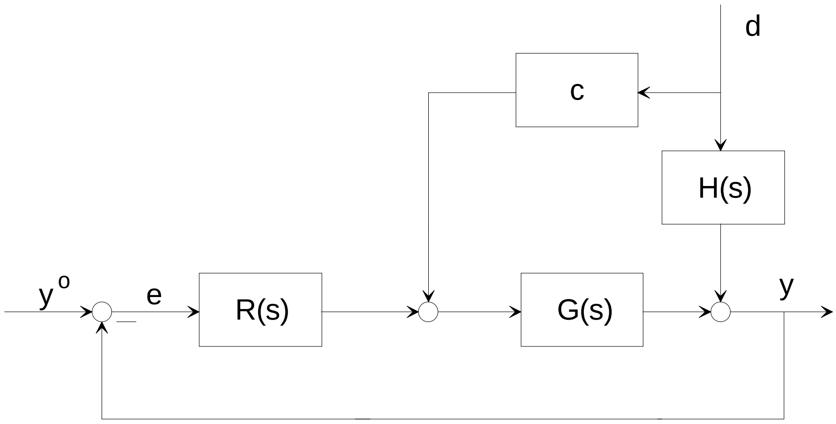
in cui:

$G(s) = \dfrac{5}{s(1+s)}$, $R(s)$ = 2

$y^o(t)$ = ram(t), $d(t)$ = 10 sca(t).

Esercizio 10.4

Con riferimento al seguente schema di controllo:



in cui:

$$G(s)=\frac{10}{1+s},\quad H(s)=20\frac{1-s}{(1+s)^2},\quad R(s)=100$$

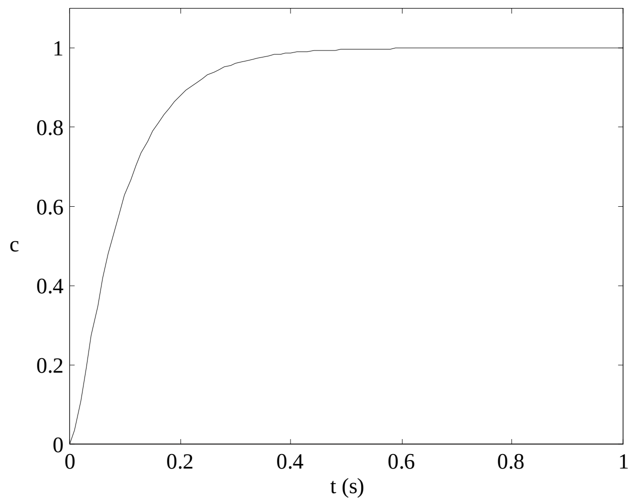
si determini il parametro c in modo tale che l'errore e a transitorio esaurito prodotto da un disturbo:

$d(t)$ = sca(t)

sia nullo.

Esercizio 10.5

Sapendo che la risposta allo scalino di un sistema di controllo assume l'andamento riportato di seguito:



individuare l'espressione corretta della funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ tra quelle riportate di seguito:

$$L_1(s)=\frac{10}{s(1+0.01s)}\qquad L_2(s)=\frac{1}{s(1+0.1s)}\qquad L_3(s)=\frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}\qquad L_4(s)=\frac{10}{1+0.1s}\ .$$

Traccia delle soluzioni

Esercizio 10.1

Poiché il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, come si ricava facilmente dal criterio di Bode, non ha senso parlare di errore a transitorio esaurito (l'errore diverge).

Esercizio 10.2

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode). La funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ ha tipo $g = 1$ e guadagno $\mu = 10$. Dalle tabelle si ricava:

a) $e_\infty = 0$

b) $|e_\infty| = \dfrac{1}{\mu} = 0.1$

c) $e_\infty = \infty$ (prevale il contributo della parabola).

Esercizio 10.3

La funzione di trasferimento d'anello vale:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(1+s)}$$

ed ha tipo $g = 1$ e guadagno $\mu = 10$. Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode). Il disturbo d si può riportare in uscita, e agli effetti statici equivale al segnale:

$$d_G(t) = 50\,\mathrm{ram}(t) \ .$$

Dalle tabelle si ricava:

Contributo d'errore dovuto a y^o: $e_{y^o\infty} = \dfrac{1}{\mu} = 0.1$

Contributo d'errore dovuto a d_G : $e_{d\infty} = -\dfrac{50}{\mu} = -5$

L'errore complessivo a transitorio esaurito vale quindi:

$e_\infty = -4.9$

Esercizio 10.4

Il sistema di funzione di trasferimento $H(s)$ è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento d'anello vale:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1000}{1+s}$$

per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode).

La funzione di trasferimento dal disturbo d all'errore e vale:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{H(s)+cG(s)}{1+L(s)} \ .$$

Dal teorema del valore finale si deduce che per rendere nullo l'errore a transitorio esaurito deve essere soddisfatta la condizione:

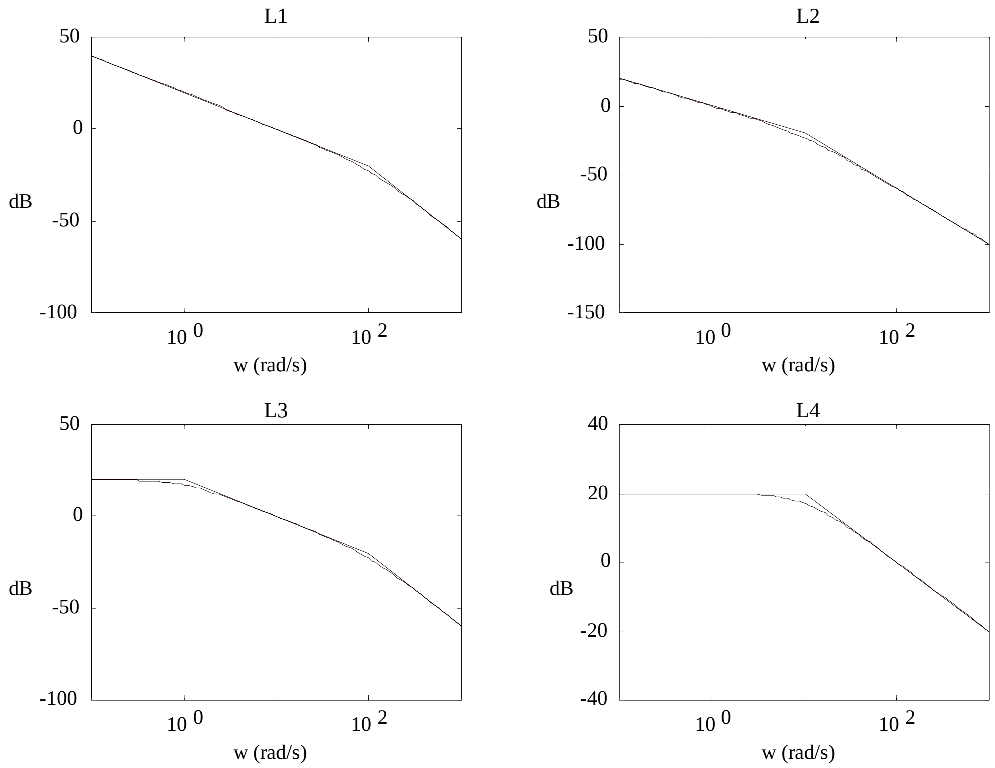
$$H(0) + cG(0) = 0$$

da cui:

$$c = -\frac{H(0)}{G(0)} = -\frac{20}{10} = -2\,.$$

Esercizio 10.5

I diagrammi di Bode del modulo delle 4 funzioni di trasferimento sono riportati in figura:



In tutti i casi il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. La risposta allo scalino del sistema in anello chiuso evidenzia una dinamica con costante di tempo pari a 0.1*s*. La pulsazione critica dovrà quindi essere pari a 10 *rad/s*, il che esclude la L_2 e la L_4. Poiché la risposta evidenzia anche errore a transitorio esaurito nullo, la funzione di trasferimento d'anello deve presentare un integratore, il che esclude anche la L_3. La funzione di trasferimento corretta è quindi la L_1.